

# מכינה במתמטיקה למדעים מדויקים **96120-12**

פרק 36 - גיאומטריה אנליטית - מקומות גיאומטריים והוכחות

[תוכן העניינים](#)

- |         |                       |
|---------|-----------------------|
| 1 ..... | 1. מקומות גיאומטריים. |
| 5 ..... | 2. שאלות הוכחה        |

## מקומות גיאומטריים:

**סיכום כללי:**

**הגדרה:**

- מקום גיאומטרי הוא אוסף נקודות בעלות תכונה מסוימת.
- מקום גיאומטרי הוא משווהה המחברת בין  $x$  ל- $y$ .

**טכניקות מרכזיות במציאות מקומות גיאומטריים:**

בשאלות של מקום גיאומטרי נפוץ השימוש בדברים הבאים:

- **шиפועים:**
  - i. שיפועי ישרים מקבילים (שווים זה לזה).
  - ii. שיפועי ישרים מאונכים (מכפלתם היא -1).
  - iii. שלוש נקודות שעל אותו ישר שומרות על אותו שיפוע.
- משפט פיתגורס.
- אמצע קטע / חלוקת קטע ביחס נתון.
- משיק למעגל – המשיק מאונך לרדיוס – רמז לשימוש במשפט פיתגורס.
- **קטע מרכזים:**
  - i. במעגלים המשיקים מבוחץ – סכום הרדיוסים.
  - ii. במעגלים המשיקים מבפנים – הפרש הרדיוסים.
- **משפטים מגאומטריה** (תאלס, משפט חוצה הזווית, דמיון משולשים)
- אם נתונה משווהה בשאלת – ניתן להשתמש בה על ידי הצבת נקודה שעלה במשווהה.

**שאלות:**

- 1)** מצא את המיקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה  $A(-7,-6)$  שווה למרחקן מהנקודה  $B(9,2)$ .
- 2)** מצא את המיקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה  $A(3,-6)$  גדול פי 3 מרחקן מהנקודה  $B(-1,10)$ .
- 3)** מצא את המיקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה  $(1,0)$  קטן פי 3 ממרחקן מהישר  $x=9$ .
- 4)** מצא את המיקום הגאומטרי של מרכזוי כל המעגלים שעוברם בנקודה  $(0,6)$  ומשיקים לישר  $x=-6$ .
- 5)** נתונים שני ישרים : I.  $3x + y - 6 = 0$  , II.  $2x + 6y - 1 = 0$ . מצא את המיקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מישר I גדול פי 4 מרחקן מישר II.
- 6)** מצא את המיקום הגאומטרי של מרכזוי כל המעגלים שימושיים לציר ה-  $y$  מימיים ומשיקים מבפנים למעגל קניי שרדיו  $4$ . מהן הגבולות?
- 7)** מצא את המיקום הגאומטרי של אמצעי כל הקטעים, המחברים את הנקודה  $(-4,10)$  עם נקודות על הישר  $y = 6x + 2$ .
- 8)** נתון מעגל שמשוואתו  $0 = x^2 + y^2 + 12x - 16y$ . מצא את המיקום הגאומטרי של אמצעי כל המיתרים במעגל שעוברם בראשית הצירים.
- 9)** נתון מעגל שמשוואתו  $36 = x^2 + y^2$ . הכפלו את שיעורי ה-  $y$  של כל הנקודות על המעגל ב-  $-\frac{2}{3}$ . מצא את המיקום הגאומטרי שמתקיים באופן הזה.

**10)** נתונות הנקודות  $A(2,0)$  ו-  $B(10,0)$ . מצא את המקום הגאומטרי של מרכז  $y = 3x - 12$ . מהי הגבלה?

**11)** נתון המעגל  $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0$ . מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל שווה למרחקו מהנקודה  $(2,7)$ .

**12)** מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל  $9 = (x-2)^2 + (y-1)^2$  בזווית של  $120^\circ$ .

**13)** מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל  $R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$  בזווית של  $60^\circ$ .

**14)** נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו  $x^2 + y^2 - 12x - 64 = 0$ . מנקודה A שעל המעגל העבירו אנך לציר ה- $x$  שחותך את ציר ה- $x$  בנקודה B והמשכו חותך את המעגל בנקודה C. בעבירותו מקביל לישר AM ובנקודה C העבירו מקביל לציר ה- $x$ . המקביל ל-AM והמקביל לציר ה- $x$  נפגשים בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודת D. מהי הגבלה?

**15)** האלייפסה  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  חותכת את חלקו החיובי של ציר ה- $x$  בנקודה A ואת חלקו החיובי של ציר ה- $y$  בנקודה B. מנקודה C שעל ציר ה- $x$  בין O ל- $A$  (O ראשית הצירים) העלו אנך לציר ה- $x$  שחותך את הישר AB בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודות מפגש הישרים BC ו-OD.

**16)** נתון מעגל קנייני שרדיוסו 3. מנקודה A שעל המעגל הורידו אנך לציר ה- $x$  שחותך את ציר ה- $x$  בנקודה C. נסמן ב- $B$  את אמצע הקטע AC. מנקודה C העבירו מקביל ל- $-AO$  (O ראשית הצירים). מצא את המקום הגאומטרי של מפגש הישרים BO והמקביל ל- $-AO$ .

**17)** נתונות הנקודות  $A(4,0)$  ו-  $B(-2,0)$ . מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות C כך שהקטע CO (O ראשית הצירים) הוא חוצה זווית  $C\Delta ABC$ . במשולש  $\Delta ABC$ .

- 18) נתון מעגל קנייני שרדיוiso  $R$ . את נקודה A של המעגל חיבורו עם ראשית הצירים  $AB : BO = a : b$  כך שמתקיים  $mnkodah A$  העבירו אנך לציר ה- $x$  ו $mnkodah B$  העבירו אנך לציר ה- $y$ .
- מצא את המקום הגאומטרי של מפגש האנכים הללו.
  - המקום הגאומטרי שמצות בסעיף א' חותך את ציר ה- $y$  בנקודות P ו-Q. מצא את אורך הקטע PQ.

### תשובות סופיות:

$$\left( x+1\frac{1}{2} \right)^2 + (y-12)^2 = 38\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$y = -2x \quad (1)$$

$$y^2 = 24x \quad (4)$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (3)$$

$$y^2 = 16 - 8x, -4 < x, y < 4 \quad (6)$$

$$x + 11y + 4 = 0, 7x + 13y - 8 = 0 \quad (5)$$

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25 \quad (8)$$

$$y = 6x - 16 \quad (7)$$

$$y = 3x - 16, x \neq 5\frac{1}{3} \quad (10)$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (9)$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 12 \quad (12)$$

$$y = 3x - 7 \quad (11)$$

$$x = 6, -10 < y < 10 \quad (14)$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4R^2 \quad (13)$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (16)$$

$$3x + 8y - 12 = 0, 0 < y < 3, 0 < x < 4 \quad (15)$$

$$(x+4)^2 + y^2 = 16 \quad (17)$$

$$PQ = \frac{2bR}{a+b} . \text{ז} \quad b^2x^2 + (a+b)^2 y^2 = R^2b^2 . \text{נ} \quad (18)$$

## שאלות הוכחה:

**שאלות:**

- 1) הנקודה P נמצאת על המעגל  $x^2 + y^2 = R^2$ . בנקודה P מעבירים משיק למעגל  $\cdot y_A \cdot y_B = R^2$ . שחותך את הישרים  $x = R$  ו-  $x = -R$ . הוכח:
- 2) הנקודה P נמצאת על המעגל  $x^2 + y^2 = R^2$ , שחותך את ציר ה- y בנקודות  $A(0, R)$  ו-  $B(0, -R)$ . בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישר  $y = R$  בנקודה T. הוכח:  $OT \parallel BP$ .
- 3) הנקודה P נמצאת על האליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , ש-  $F_1$  ו-  $F_2$  הם מוקדייה. הוכח:  $PO^2 + PF_1 \cdot PF_2 = a^2 + b^2$  ( $O$  ראשית הצירים).
- 4) הנקודה P נמצאת על האליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , שקודקודת הימני הוא A וקודקודת השמאלי הוא B. הישר AP חותך את הישר  $x = -a$  בנקודה K והישר BP חותך את הישר  $x = a$  בנקודה L. הוכח:  $y_K \cdot y_L = 4b^2$ .
- 5) הנקודה P נמצאת על האליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . היחס בין ריבוע אורך האנך, היורד מנקודה P לציר הגדל, ובין מכפלת שני קטעי הציר הגדל שמשני צידי האנך הוא גודל קבוע. הוכח:
- 6) הנקודה P נמצאת על האליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , שקודקודת הימני הוא A וקודקודת השמאלי הוא B ומוקד הימני הוא F<sub>1</sub>. הישר AP חותך את הישר  $x = \frac{a^2}{c}$  בנקודה N. הוכח:  $\angle MF_1N = 90^\circ$ .
- 7) נתונה האליפסה  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . הוכח כי מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו היא  $-\frac{b^2}{a^2}$ .

8) בפරבולת  $x^2 = 2px$  מעבירים נורמל. הוכח כי היטלו של הנורמל על ציר ה- $x$  הוא גודל קבוע.

9) בפරבולת  $x^2 = 2px$  מעבירים משיקים משתי נקודות שעלייה, A ו-B. המשיקים נפגשים בנקודה C. הוכח:  $y_A + y_B = 2y_C$ .

10) בנקודה A, שעל הפירבולת  $x^2 = 2px$  מעבירים משיק לפירבולת שחותך את המדריך שלה בנקודה B. ממוקד הפירבולת מעלים אנק לציר ה- $x$  שחותך את המשיק בנקודה C. הוכח:  $FB = FC$  (F - מוקד הפירבולת).

11) בפירבולת  $x^2 = 2px$  מעבירים מיתר, החותך את הפירבולת בנקודות A ו-B. המיתר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה C. הוכח:  $x_A \cdot x_B = (x_C)^2$ .